ВОПРОСЫ—БИЛЕТЫ

к экзамену по математическому анализу за первый семестр
для студентов первого курса второго потока
2011-2012 учебный год
Лектор профессор В.А.Зорич

1. Действительные числа. Ограниченные (сверху, снизу) числовые множества. Аксиома полноты и существование верхней (нижней) грани множества. Неограниченность множества натуральных чисел, принцип Архимеда и всюду плотность множества рациональных чисел.

2. Основные леммы, связанные с полнотой множества действительных чисел $\mathbb{R}$ (вложенные отрезки, конечное покрытие, предельная точка).

3. Предел последовательности и критерий Коши его существования. Критерий существования предела монотонной последовательности. Предел $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to +\infty$.

4. Ряд и его сумма. Геометрическая прогрессия. Критерий Коши и необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Абсолютная сходимость.

5. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами. Теорема сравнения. Ряд $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

6. Предел функции. Основные базы предельного перехода. Определение предела функции при произвольной базе и его расшифровка в конкретных случаях. Бесконечно малые функции и их свойства. Сравнение финального поведения функций, асимптотические формулы и основные операции с символами $o(\cdot)$, $O(\cdot)$.

7. Взаимосвязь предельного перехода с арифметическими операциями и отношением порядка в $\mathbb{R}$. Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$.

8. Предел композиции функций и монотонной функции. Предел $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$.

9. Критерий Коши существования предела функции.

10. Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций (локальная ограниченность, сохранение знака, арифметические операции, непрерывность композиции). Непрерывность многочлена, рациональной функции и тригонометрических функций.

11. Глобальные свойства непрерывных функций (промежуточные значения, максимумы, равномерная непрерывность).

12. Разрывы монотонной функции. Теорема об обратной функции. Непрерывность обратных тригонометрических функций.

13. Закон движения, перемещение за малое время, вектор мгновенной скорости, траектория и касательная к ней. Определение дифференцируемости функции в точке. Дифференциал, его область определения и область значений. Единственность дифференциала. Производная вещественнозначной функции вещественного переменного и её геометрический смысл. Дифференцируемость функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln|x|$, x^α.

14. Дифференцирование и арифметические операции. Дифференцирование многочлена, рациональной функции, тангенса и котангенса.

15. Дифференциал композиции функций и обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций.

16. Локальный экстремум функции. Необходимое условие внутреннего экстремума дифференцируемой функции (лемма Ферма).

17. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о конечном приращении (о среднем).

18. Формула Тейлора с остаточными членами в формах Коши и Лагранжа.

19. Ряд Тейлора. Тейлоровские разложения функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ (бином Ньютона).

20. Локальная формула Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано).

21. Взаимосвязь характера монотонности дифференцируемой функции и положительности её производной. Достаточные условия наличия или отсутствия локального экстремума в терминах первой, второй и высших производных.

22. Выпуклая функция. Дифференциальные условия выпуклости. Расположение графика выпуклой функции по отношению к касательной.

23. Общее неравенство Иенсена для выпуклой функции. Выпуклость (вогнутость) логарифма. Классические неравенства Коши, Юнга, Гёльдера и Минковского.

24. Комплексное число в алгебраической и тригонометрической записи. Сходимость последовательности комплексных чисел и ряда с комплексными членами. Критерий Коши. Абсолютная сходимость и достаточные признаки абсолютной сходимости ряда с комплексными членами.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

25. Круг сходимости и радиус сходимости степенного ряда. Определение функций e^z, $\cos z$, $\sin z$ $(z\in\mathbb{C})$. Формула Эйлера и взаимосвязь элементарных функций.

26. Начальные представления о численных методах решения уравнений. Корни уравнений и неподвижные точки отображений. Сжимающие отображения и принцип неподвижной точки. Метод касательных (метод Ньютона).